Հետազոտական աշխատանք՝

Մաթեմատիկան և ժամանցային խաղերը. Գրաֆների տեսություն

Հետազոտող՝ Մանե Մազմանդյան
Ղեկավար՝ Ստեփան Մարգարյան

Բովանդակություն

Մաթեմատիկան և ժամանցային խաղերը. Գրաֆների տեսություն

Նախաբան

Մեր շուրջն ամենուրեք մաթեմատիկա է: Մեր ամենօրյա գործունեության հիմնական մասը, օրինակ՝ գնումներ կատարելը, համակարգչային խաղերը խաղալը մաթեմատիկա է:

Ձևը և տարածությունը մաթեմատիկայի հին ճյուղ է: Հույները կարողանում էին հաշվել երկրագնդի շառավիղը, այն մեթոդներով, որոնք մենք սովորում ենք դպրոցում: 20-րդ դարի 60-ական թվականներին մաթեմատիկայի օգնությամբ մարդը քայլեց լուսնի վրա:

Ներկա ժամանակներս մաթեմատիկան օգտագործվում է համակարգչային գրաֆիկայի, բժշկական ապարատների պատրաստման ոլորտներից մինչեւ սանրվածքի ձևավորման և այլ ոլորտներում:

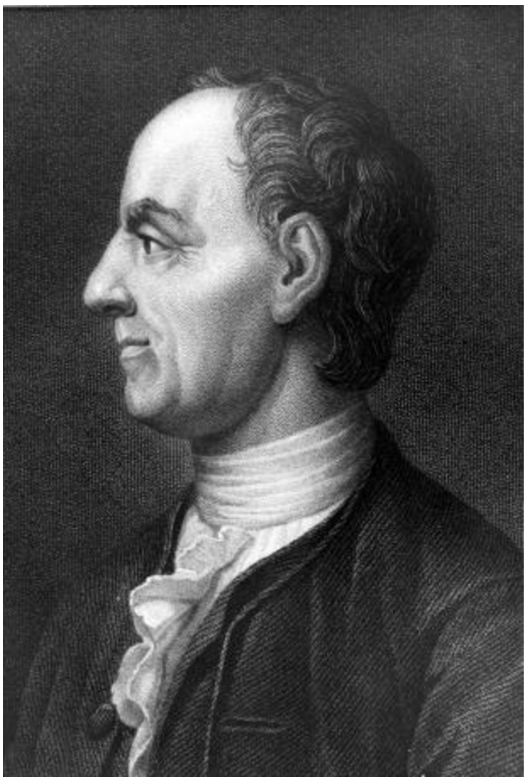
Առօրյայում թվաբանությունն ավելի շատ է օգտագործվում: Օրինակ՝ մշակել դեղաքանակը այն տալուց առաջ, կամ իմանալը արդյո՞ք կհերիքի գրպանիդ գումարը ամբողջ շաբաթվա համար: Հավանականության մասին իմանալը օգնում է հասկանալ արդյո՞ք արժե ռիսկի դիմել, այս կամ այլ իրավիճակներում: Մտավոր հաշվելը նույնպես կօգնի խուսափել բազմաթիվ սխալներից, օրինակ՝ խանութում գնումների ժամանակ:

Թերթերը և հեռուստացուցային լուրերը լի են վիճակագրություններով: Դրանք օգնում են հիմնավորելու տարբեր տեսակի փաստարկներ: Հասկանալով, թե ինչպես է վիճակագրությունը աշխատում կարիք չի լինի հավատալ միայն այն բանին ինչն ասում են <<փորձագետները>>, այլ հնարավոր կլինի կառուցել սեփական միտքը և կարծիքը:

Թեորեմների մեծ մասի բացահայտման ակունքները մեզ հայտնի չեն, քանի որ դրանք գալիս են բավական վաղ ժամանակներից, ինչը փաստում է մաթեմատիկայի կարևորությունը և օգտագործումը դեռևս հազարավոր տարիներ առաջ: Սակայն այն տեսությունը, որի մասին խոսելու ենք այս հետազոտական աշխատանքում, տարբերվում է և ավելի բացահայտ է հասել մեզ:

Լեոնիդ Էյլերն այն հանճարներից է, ում աշխատանքները դարձել են ողջ մարդկության սեփականությունը: Նա թողել է կարևորագույն աշխատություններ մաթեմատիկայի, մեխանիկայի, ֆիզիկայի, աստղագիտության և մի շարք կիրառական գիտությունների ամենատարբեր ճյուղերի վերաբերյալ:

Լեոնիդ Էյլեր



Լեոնիդ Պոլ Էյլերը (1707-1783) համարվում է 18-րդ դարի առաջատար մաթեմատիկոս և բոլոր ժամանակների ամենաբեղուն և ականավոր գիտնականներից մեկը: Շվեյցարիայում ծնված այս մաթեմատիկոսը ճանաչվում է որպես մաթեմատիկայի բնօրինակ հայրերից մեկը, ով որոշիչ ներդրում է ունեցել տեսության, հաշվարկի, գրաֆիկայի և մեխանիկայի ոլորտներում:

Նա նաև ֆիզիկոս և փիլիսոփա էր. նրա ունակությունն ու զգոնությունը և արտահայտած մտքերը ստիպում են համեմատել նրան ֆիզիկայի հոր ՝ Ալբերտ Էյնշտեյնի հետ: Ըստ նրա կենսագրությունն ու գործունեությունն ուսումնասիրած պատմաբանների, բազմաթիվ հարցերում նա թեթևամիտ էր, ոչ նրբանաշակ, բայց շատ համառ և աշխատասեր:

Կրոնական պատրաստվածությունը նրան առաջնորդեց դեպի փիլիսոփայության դաշտ այդ մոտեցման ներքո: Չնայած դրան, հայտնի է, որ նա չէր տիրապետում հռետորաբանության հիմնավոր գիտելիքին կամ պատշաճ կերպով վարվելակերպին, մի բան, որից օգտվել են նրա՝ որպես փիլիսոփայի որոշ մրցակիցներ ՝բանավեճեր կազմակերպելու համար այնպիսի թեմաների շուրջ, ինչպիսին է օրինակ՝ մետաֆիզիկան, որոնց քննարկումներից նա հազվադեպ էր հաջողությամբ դուրս գալիս:

Ծնված լինելով հովվի ընտանիքում, նա իր մանկությունն անցկացրել է մոտակա գյուղում, որտեղ հայրը ստացել է ծխական համայնք: Այստեղ, գյուղական բնության գրկում, համեստ հովվի տան բարեպաշտ մթնոլորտում, Լեոնիդը ստացավ իր նախնական կրթությունը, որը խոր հետք թողեց նրա հետագա ողջ կյանքի ու հայացքի վրա:

Այդ օրերին գիմնազիայում կրթությունը կարճաժամկետ էր: 1720 թվականի աշնանը տասներեքամյա Էյլերը ընդունվեց Բազելի համալսարան: Ի սկզբանե, Էյլերն աչքի ընկնող էր, և նրան հաջողվեց 13 տարեկանում ընդունվել Բազելի համալսարան: Այդ ժամանակ նա ապրում էր մայրական տատիկի խնամակալության ներքո: Երեք տարի անց նա ավարտեց փիլիսոփայության ֆակուլտետը և հոր խնդրանքով ընդունվեց աստվածաբանության ֆակուլտետ:

1723 թվականին, երբ նա ընդամենը 16 տարեկան էր, ստացավ փիլիսոփայության մագիստրոսի կոչում:

1724 թվականի ամռանը, մեկ տարվա համալսարանական ակտում, նա լատիներեն կարդաց Դեկարտյան և Նյուտոնյան փիլիսոփայության համեմատության մասին ելույթը:

Հետաքրքրություն ցուցաբերելով մաթեմատիկայի նկատմամբ՝ նա գրավեց Յոհան Բեռնուլիի ուշադրությունը: Պրոֆեսորը սկսեց անձամբ վերահսկել երիտասարդի ինքնուսուցումը և շուտով հրապարակավ խոստովանեց, որ մեծագույն հաջողություն է ակնկալում երիտասարդ Էյլերի խորաթափանցությունից և մտքի սրությունից:

Հոր ազդեցության տակ, որը հույս ուներ ձեռնադրել նաև իր Եկեղեցու հովիվ, Էյլերը վճռականորեն ուսումնասիրեց եբրայերեն, հունարեն և աստվածաբանություն:

1725 թվականին, Էյլերի ուսուցչի որդիները հրավեր ստացան տեղափոխվելու Սանկտ Պետերբուրգի Գիտությունների ակադեմիա, որն այն ժամանակ բացվել էր Պետրոս Առաջինի որոշումով: Էյլերը ցանկություն հայտնեց ուղեկցել նրանց:

Էյլերը հեռացավ Բազելից 1727 թվականի գարնանը և յոթ շաբաթ տևած ճանապարհորդությունից հետո ժամանեց Սանկտ Պետերբուրգ:

Հայտնի է, որ այստեղ նա նախ ընդունվել է բարձրագույն մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ապա՝ 1731-ին դարձել է ակադեմիկոս (պրոֆեսոր)՝ ստանալով տեսական և փորձարարական ֆիզիկայի, ապա (1733) բարձրագույն մաթեմատիկայի բաժինը:

Սանկտ Պետերբուրգ ժամանելուն պես նա ամբողջովին խորասուզվեց գիտական աշխատանքի մեջ, ապա բոլորին ապշեցրեց իր աշխատանքի արդյունավետությամբ: Ակադեմիական տարեգրքերում նրա բազմաթիվ հոդվածները, որոնք սկզբում հիմնականում նվիրված էին մեխանիկայի խնդիրներին, շուտով նրան համաշխարհային համբավ բերեցին, իսկ ավելի ուշ նպաստեցին Արևմտյան Եվրոպայում Սանկտ Պետերբուրգի ակադեմիական հրատարակությունների փառքին: Այդ ժամանակից ի վեր Էյլերի ստեղծագործությունների շարունակական հոսքը հրապարակվել է Ակադեմիայի նյութերում մեկ դար շարունակ:

Ռուսաստանում շոշափելի էր քաղաքական անկայունությունը: Մտահոգված լինելով իր և իր ընտանիքի անվտանգությունից՝ նա որոշեց 1741 թվականի հունիսի 19-ին մեկնել Բեռլին՝ այնտեղ հաստատվելու և այդ քաղաքի ակադեմիայում աշխատելու հնարավորություն ունենալու համար:

Գերմանիայում նա մնաց 25 տարի, որի ընթացքում գրեց իր կյանքի տրակտատների և աշխատությունների մեծ մասը: Համապատասխանաբար 1748 և 1755 թվականներին նա գրում և հրատարակում է «Ներածություն անալիզին Ինֆինիտորում» և «Հաշվապահական հաշվարկներ» ստեղծագործությունները: Սրանք երկու ամենակարևոր աշխատանքներից էին, որոնք այս գիտնականը գրել է որպես գիտաշխատող իր կարիերայի ընթացքում:

Ընդհանուր տեսական հետազոտությունների հետ մեկտեղ Էյլերին են պատկանում մի շարք կարևոր աշխատանքներ կիրառական գիտություններում: Դրանց թվում առաջին տեղը զբաղեցնում է նավի տեսությունը: Նավի լողունակության, կայունության և նրա այլ ծովային պիտանիության հարցերը մշակվել են Էյլերի կողմից իր երկհատոր «Նավային գիտություն» աշխատության մեջ (1749), իսկ նավի կառուցվածքային մեխանիկայի որոշ հարցեր՝ հետագա աշխատություններում: Նա ավելի մատչելի ներկայացրեց նավի տեսությունը

Նավերի կառուցվածքի և նավարկության ամբողջական տեսությունում (1773), որը որպես գործնական ուղեցույց օգտագործվել է ոչ միայն Ռուսաստանում:

1780-ականների սկզբին Էյլերն ավելի ու ավելի էր բողոքում գլխացավերից և ընդհանուր թուլությունից: 1883 թվականի սեպտեմբերի 18-ին՝ կեսօրին, նա զրույց ունեցավ ակադեմիկոս Անդրեյ Լեքսելի հետ, որի ընթացքում Էյլերի ինքնազգացողությունը վատացավ և կիսգեշերին նա մահացավ:

Իր կյանքի ընթացքում Լեոնիդ Էյլերը տարեկան գրել է մինչև 800 էջ ՝ իր ամենաարդյունավետ տարիքում: Հայտնի է, որ նրա ստեղծագործությունների ճնշող մեծամասնությունը դեռ կիսված չէ աշխարհի հետ և սպասում է վերարտադրության «Օպերա Օմիա» վերնագրի ներքո, մի նախագիծ, որի նպատակն է ի հայտ բերել այս գիտնականի գրած բոլոր տեքստերը: [16]

Շվեյցարական 10 ֆրանկանոց թղթադրամի վրա դրվել է Էյլերի դիմանկարը:

Քյոնիգսբերգի յոթ կամուրջները

Քյոնիսբերգ քաղաքը տեղակայված էր Պրեգոլյա գետի երկու ափերին: Հիմնադրվել է 1255 թվականին խաչակիրների կողմից:

1946 թվականին տարածքը Խորհրդային Միությանն անցնելուց հետո վերանվանվել է Կալինինգրադ ի պատիվ կոմունիստական կուսակցության և խորհրդային տարիների պետական գործիչ Միխայիլ Կալինինի: Այն այսօր Ռուսաստանի կազմում է, էքսկլավ է եւ գտնվում է Լեհաստանի եւ Լիտվայի միջև, Բալթիկ ծովի ափին: [11]

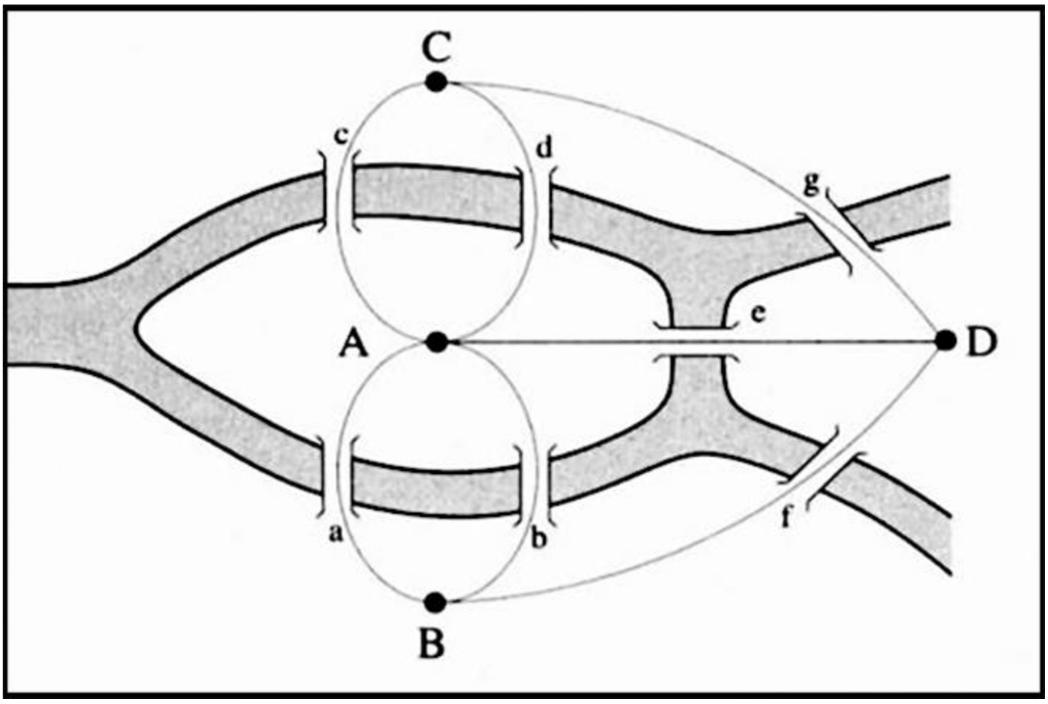
Քաղաքում հոսում է գետ, որը ճուղավորվում է, ճուղավորման կետում առաջացնելով կղզի: Դրա պատճառով քաղաքը բաժանված էր չորս ցամաքների, որոնք կապված էին միմյանց հետ յոթ կամրջով: Մարդիկ հաճախ էին օգտագործում կամուրջները իրենց առօրյայում և ոչ մի առանձնահատուկ վերաբերմունք չէին ցուցաբերում: Շրջակայքում հաճախակի կարելի էր ականատես լինել տարբեր խաղերի, որոնք զվարճացնում և միևնույն ժամանակ մտածելու տեղ էին տալիս քաղաքի բնակիչներին:

Շուտով, կամուրջներով մի ցամաքից մյուսը անցնելու վերաբերյալ խնդիր ծնվեց, որը քաղաքի շատ բնակիչների համար դարձավ ժամանցային խաղ, ինչը անգամ հանգեցնում էր խաղադրույքների:

Խնդիրը հետևյալն էր. **քաղաքի որևէ հատվածից շրջագայելով անցնել բոլոր յոթ կամուրջներով, ընդ որում յուրաքանչյուր կամրջով անցնել միայն մեկ անգամ և վերադառնալ սկզբնակետ։ Չի կարելի օգտագործել որևէ այլ ճանապարհ, բացի կամուրջներից։**

Այսպիսով, 18-րդ դարի սկզբին յոթ կամուրջները ճանաչում գտան ողջ տարածաշրջանում, շնորհիվ բնակիչների կողմից հորինված և առաջին հայացքից հեշտ թվացող խնդրի։ Քաղաքում ևս խնդիրը այնքան մեծ տարածում էր գտել, որ մարդիկ էին գտնվում, ովքեր հայտարարումարարում էին, թե նրանց մոտ ստացվել է անցնել կամուրջները և լուծել խնդիրը։

Այդպիսի մեծ ճանաչում գտած խնդիրը չէր կարող անտարբեր անցնել Էյլերի կողքով։ Էյլերը որոշեց կամուրջների խնդրին տալ մաթեմատիկական ձևակերպում և ապացուցեց, որ խնդիրը լուծում չունի։ Ավելին խնդիրը լուծում չունի, եթե սկզբնակետից բացի թույլատրվի այլ տեղ ավարտել ճանապարհը։ Ամենադժվարը վերլուծության տեխնիկայի զարգացումն էր և մաթեմատիկական խստությամբ պնդումն ապացուցելը, ինչի արդյունքում էլ ծնվեց ժամանակակից գրաֆների տեսությունը։

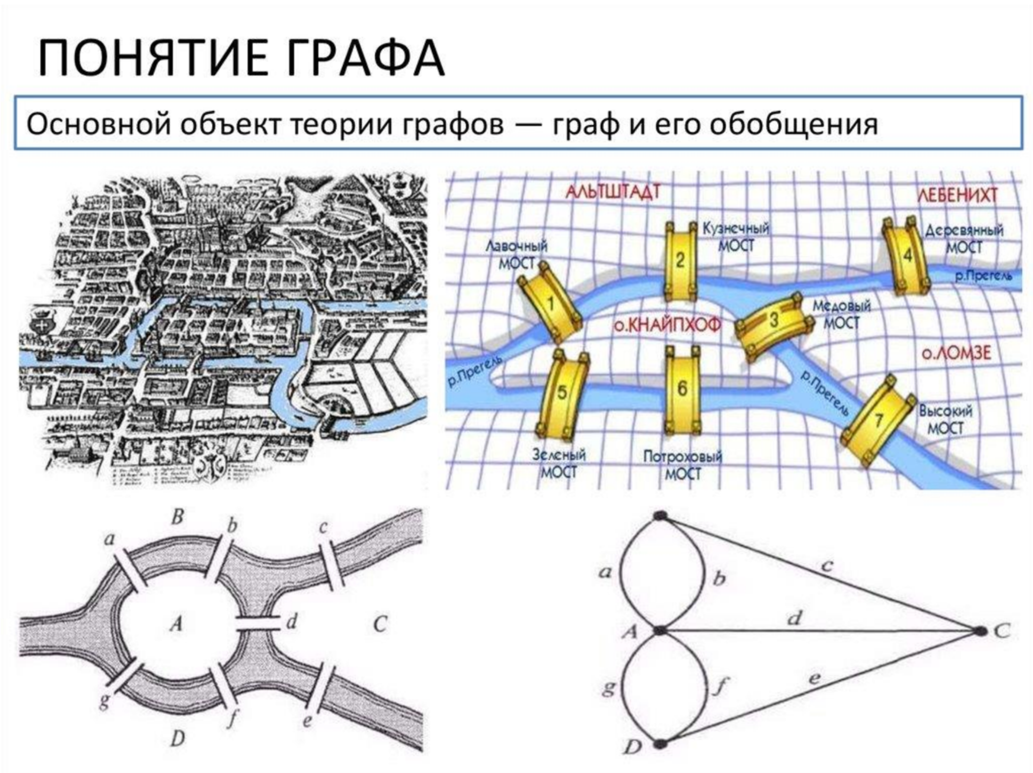


Էյլերի տեսության առաջացումը

Էյլերը նկատեց, որ ճանապարհի ընտրությունը խնդրի լուծման համար կարևոր չէ: Կարևորը կամուրջներով անցնելու հերթականությունն է: Սա հնարավորություն տվեց նրան վերակազմել խնդիրը աբստրակտ պայմաններով: Նա հեռացրեց ամեն ինչ, բացի ցամաքային տարածքներից և դրանք կապող կամուրջներից: Էյլերը ցամաքային մասերը փոխարինեց կետերով, իսկ կամուրջները՝ գծերով: Յուրաքանչյուր գիծ (կամուրջ) ցույց էր տալիս, թե որ գագաթը (ցամաքի մասը) որին էր միացված: Այսպես նա ստացավ մի պատկեր, որը հետագայում անվանեց գրաֆ:

Փաստորեն համապատասխան ճանապարհի գոյությունն ուսւմնասիրելու համար Էյլերն սկսեց ուսումնասիրել մի պատկեր որը կազմված էր կետերից եւ դրանց որոշ զույգեր միացնող գծերից:

Գրաֆ բառը մաթեմատիկայում օգտագործվող ֆունկցիայի գրաֆիկի նմանությամբ առաջացած տերմին է, որն այս դեպքում ավելի շատ ուրվագիծ իմաստ ունի:



Ըստ վերջին պատկերի բոլոր այս կետերը գրաֆի գագաթներն են, իսկ նրանց միացնող գծերը՝ գրաֆի կողերը(էջերը): Ստորև կտանք գրաֆի ճշգրիտ սահմանումը:

Հաջորդիվ, Էյլերը նկատեց, որ բացի սկզբանական և վերջնական գագաթներից՝ ամեն մի գագաթ (ցամաքի հատված) որևէ կամուրջով մտնելիս պետք է այնտեղից դուրս գան այլ կամրջով: Այլ կերպ ասած, մուտքերի և ելքերի քանակը պետք է հավասար լիներ: Հետևաբար, խնդրի պայմաններով որևէ ճանապարհի առկայության դեպքում, բացի սկզբնական և վերջնական գագաթներից՝ յուրաքանչյուր գագաթին կից կամուրջների թիվը պետք է զույգ լիներ: Այնուամենայնիվ, խնդիր համապատասխան գրաֆում բոլոր գագաթների աստիճանները կենտ էին. մեկից դուրս էր գալիս հինգ կամուրջ, իսկ մյուսներից՝ երեքական:

Գրաֆի սահմանումը

Ենթադրենք V -ն տրված կետերի որևէ վերջավոր բազմություն է, իսկ E-ն այդ բազմության երկու տարրանոց ենթաբազմությունների բազմություն է:

(V, E) կարգավորված զույգը կանվանենք **գրաֆ**:

V-ն կոչվում է գրաֆի **գագաթների բազմություն**, իսկ **E**-ն՝ **գրաֆի կողերի** կամ էջերի բազմություն: Գրաֆի կողը՝ դա երկու տարբեր գագաթների չկարգավորված զույգ է:

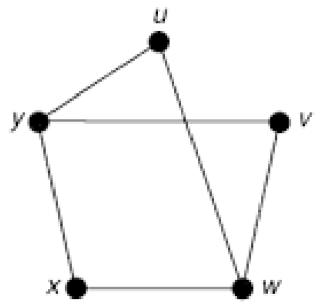
Այլ կերպ ասած գրաֆն իրենից ներկայացնում էվերջավոր քանակով կետերի նայդ կետերի որոշ չկարգավորված զույգերի բազմություն:

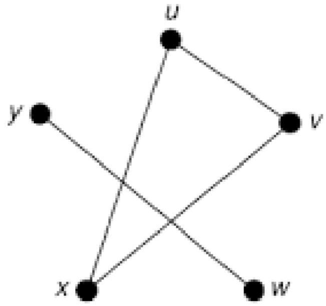
Գրաֆի պատկերը բաղկացած է կետերից (գագաթներից), որոնցից որոշ զույգեր միացված են գծերով (կողերով):

Կողովմիացված գագաթները կոչվում են այդ կողի ծայրակետեր:

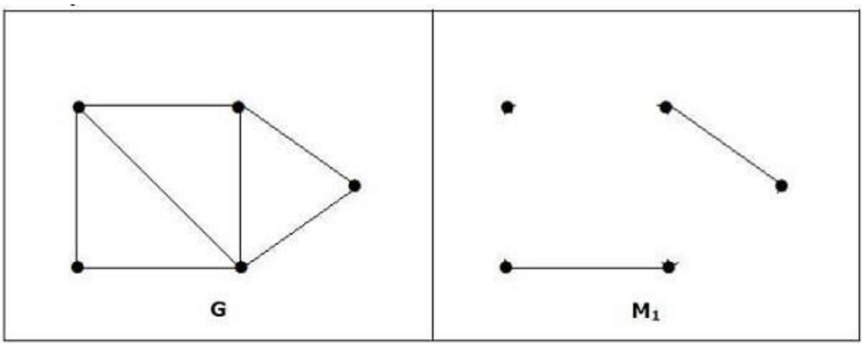
Այլ կերպ ասած, վերջավոր քանակությամբ գագաթների, և նրանցից բաղկացած որոշ զույգերի միավորումը կոչվում է **գրաֆ**:

Սխեմատիկորեն գրաֆը կարելի է պատկերացնել հետևյալ կերպ՝





Ա **Բ**



Գ **Դ**

Նկարում պատկերված **Ա** գրաֆը համաձայն մեր սահմանման հետևյալ բազմությունների զույգն է.

$$V = \{u,v,w,x,y\}$$

$$E = \{(u,y),(u,w),(y,x),(y,v),(x,w),(v,w)\}$$

$$G = (V, E)$$

Գագաթի լոկալ աստիճան

Գրաֆի գագաթի լոկալ աստիճան կամ գագաթի աստճան կոչվում է այդ գագաթից դուրս եկող կողերի քանակը:

Հեշտությամբ ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները, որոնք հաճախակի են օգտագործվում:

Թեորեմ — Գրաֆի գագաթների աստճանների գումարը երկու անգամ մեծ է գրաֆի կողերի քանակից: [3]

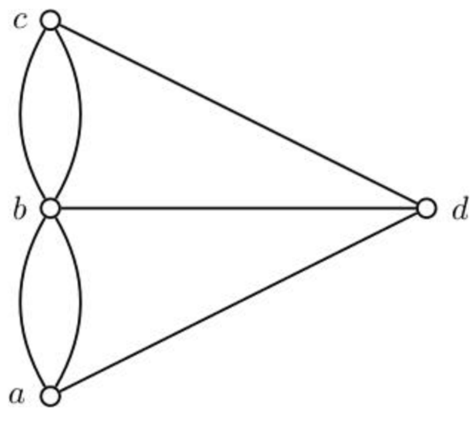
Գրաֆի գագաթը կոչվում է **կենտ**, եթե այդ գագաթի աստիճանը կենտ թիվ է, և կոչվում է **զույգ**, եթե այդ գագաթի աստիճանը զույգ թիվ է:

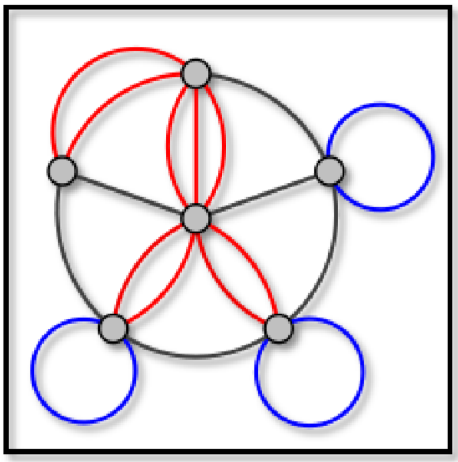
Թեորեմ — Յանկացած գրաֆ ունի զույգ քանակությամբ կենտ աստիճանի գագաթներ (2n): [3]

Չնակերպենք մի քանի սահմանումներ, որոնք մենք օգտագործելու ենք.

Եթե գրաֆում թույլատրվում են այնպիսի կողեր, որոնց երկու ծայրերն էլ միանում են միևնույն գագաթին, ապա դրանք առաջացնում են **օղակներ**:

Երբեմն գրաֆի գագաթների միևնույն զույգի միջև լինում են մեկից ավելի կողեր: Դրանք կոչվում են **պատիկ կողեր**: Կամուրջների խնդրին համապատասխան գրաֆը պարունակում է պատիկ կողեր:





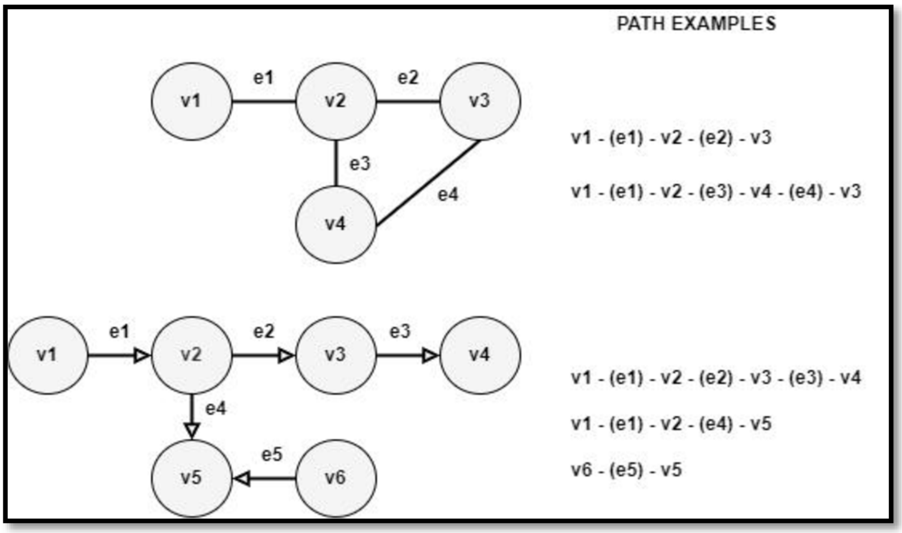
(կապույտը՝ օղակներ, կարմիրը՝ պատիկ կողեր)

Սովորաբար V և E բազմությունները ընդունվում են վերջավոր: Հակառակ դեպքում գործ ունենք անվերջ գրաֆների հետ, որոնց համար վերջավոր գրաֆների բազմաթիվ հատկություններ տեղի չունեն:

Գրաֆի կարգը գագաթների բազմության հզորությունն է (քանակը):

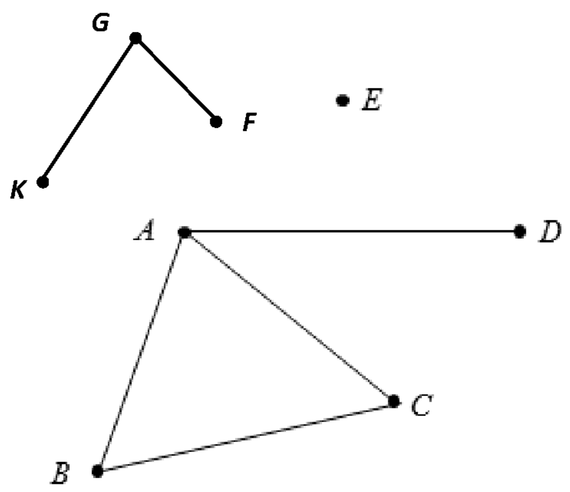
Ճանապարհ

Գրաֆի գագաթների և կողերի այնպիսի հաջորդականությունը, որտեղ ամեն մի գագաթին հաջորդում է այդ գագաթը որպես ծայրակետ ունեցող կողը, իսկ կողին հաջորդում է մյուս ծայրակետ գագաթը, կոչվում է ճանապարհ:



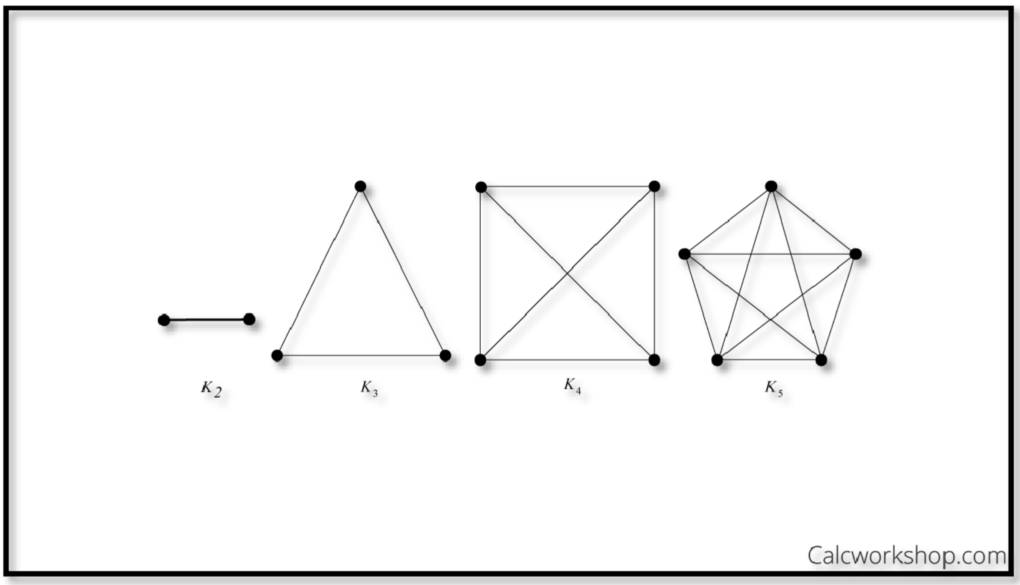
[1]

Եթե գրաֆի ցանկացած երկու գագաթների միջև գոյություն ունի նրանց միացնող ճանապարհ, ապա այն կոչվում է **կապակցված գրաֆ**, հակառակ դեպքում այն կոչվում է չկապակցված գրաֆ:



(Չկապակցված գրաֆ)

Գրաֆը կոչվում է **լրիվ գրաֆ**, եթե նրա ցանկացած երկու գագաթ միացված են կողով:



Completed graph, *denoted* **K**.

Գրաֆում ճանապարհը կոչվում է **ցիկլ**, եթե նրա սկզբնական և վերջնական գագաթները համընկնում են:

Էյլերյան ճանապարհ

Եթե ճանապարհն անցնում է գրաֆի բոլոր կողերով, այն էլ միայն մեկ անգամ, ապա այն կոչվում է էյլերյան ճանապարհ:

Էյլերյան ցիկլ

Էյլերյան ճանապարհը կոչվում է էյլերյան ցիկլ, եթե նրա սկզբնական և վերջնական կետերը համընկնում են:

Վերադառնանք նորից Քյոնիգսբերգի յոթ կամուրջների խնդրին:

Հեշտ է տեսնել, որ խնդրի պահանջը հանգում է համապատասխան գրաֆում էյլերյան ցիկլ գտնելուն:

Էյլերը լուծեց ոչ միայն այս խնդիրը, այն է, տվեց այս խնդրի վերջնական և մաթեմատիկորեն ապացուցված պատասխան, այլ նաև ձևակերպեց ցանկացած գրաֆում էյլերյան ցիկլ գոյություն ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայման:

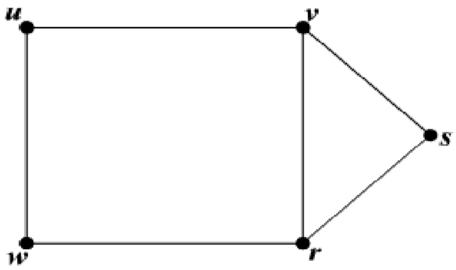
Էյլերի թեորեմը

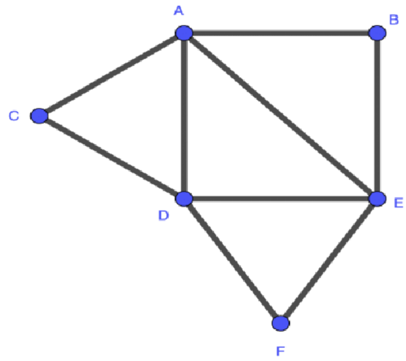
Գրաֆում գոյություն ունի էյլերյան ցիկլ այն և միայն այն դեպքում, եթե այն կապակցված է և յուրաքանչյուր գագաթի լոկալ աստիճանը զույգ է:

Եթե դիտարկենք Քյոնիգսբերգյան կամուրջներին համապատասխանող գրաֆը, ապա հեշտ է տեսնել, որ այն չի բավարարում էյլերի թեորեմի պայմաններին, ինչը նշանակում է, որ այն չի պարունակում էյլերյան ցիկլ:

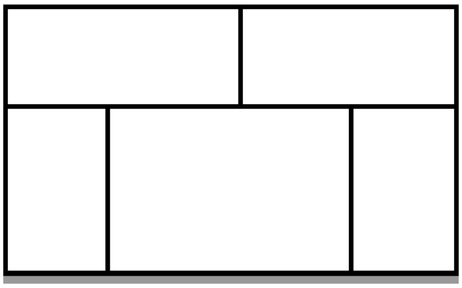
Հետևաբար, տևական ժամանակ մարդկանց զբաղեցնող խնդիրը, այն է՝ անցնել այդ յոթ կամուրջներով և վերադառնալ նույն կետը, լուծում չունի:

Բերենք մի քանի օրինակներ՝





Ա **Բ**



Գ

Հեշտ է տեսնել, որ.

Ա նկարում պատկերված գրաֆում կա Էյլերյան ճանապարհ, բայց չկա Էյլերյան ցիկլ: Այս գրաֆում ոչ բոլոր գագաթներն ունեն զույգ լոկալ աստիճան: vևr գագաթների լոկալ աստիճանները 3 են:

Բ նկարում պատկերված գրաֆը պարունակում է նաև Էյլերյան ցիկլ, քանի որ այն կապակցված է և բոլոր գագաթների լոկալ աստիճանները զույգ են:

Գ նկարում պատկերված գրաֆում ո՛չ Էյլերյան ճանապարհ կա, ո՛չ էլ Էյլերյան ցիկլ:

Գրաֆների տեսությունը Էյլերի կողմից ստեղծվելուց հետո, տևական ժամանակ ծառայում էր հիմնականում ժամանցային խնդիրների լուծման համար:

Այս տեսության լայն կիրառությունը գիտության տարբեր ոլորտներում, հետևաբար նաև հետագա բուռն զարգացումը, մեծ հաշվով կարելի է վերագրել 19-րդ դարի վերջերից սկսած ժամանակահատվածին։

Գ նկարի նման պատկերները, ոչ որպես գրաֆներ, շատ տարածված են եղել որպես ժամանցային խաղեր։ Դրանք այսօր ևս տարածված են, հիմնականում ոչ մասնագիտական շրջանակներում հետևյալ հարցադրումով.

Կարո՞ղ եք գրիչը թղթից ընդամենը,օրինակ՝ երկու անգամ բարձրացնելով գծել տրված պատկերը։ Պարզ է, որ եթե հանգույցները դիտարկենք որպես գրաֆի գագաթներ, իսկ գծերը՝ որպես գրաֆի կողեր, ապա խնդիրը կստանա հստակ մաթեմատիկական ձևակերպում։ Այն է՝

Արդյո՞ք այս գրաֆը կարելի է բաժանել նշված քանակով մասերի այնպես, որ յուրաքանչյուր մասում գոյություն ունենա էյլերյան ճանապարհ։

Այսպիսի գրաֆների դեպքում բնական հարց է առաջանում՝ կան արդյոք այնպիսի պայմաններ, որոնց բավարարելու դեպքում տրված գրաֆում այդ բաժանումը հնարավոր է։ Հետևյալ թեորեմից հետևում է, որ այդպիսի պայմաններ կան։

Թեորեմ. Եթե գրաֆի կենտ լոկալ աստիճան ունեցող գագաթների քանակը 2n է, ապա այդ գրաֆում կա n հատ ճանապարհ չկրկնվող կողերով, որոնք բոլորը միասին ծածկում են գրաֆի կողերը։ [3]

Փաստորեն այս թեորեմով և էյլերյան ցիկլի վերաբերյալ թեորեմով տրվում են ոչ միայն գրաֆում էյլերյան ցիկլի, էյլերյան ճանապարհի գոյության պայմանները, այլև որոշակի քանակով ճանապարհներով բոլոր կողերը ծածկելու պայմանները։

Գրաֆի բոլոր կողերն ընդգրկող ճանապարհի ուսումնասիրությունից հետո, բնական հարց է առաջանում՝ գրաֆի բոլոր գագաթներով մեկ անգամ անցնող ճանապարհի գոյության պայմանների վերաբերյալ։ Մանավանդ որ, բազմաթիվ խնդիրներ գոյություն ունեն, որոնք բերվում են գրաֆում այդպիսի ճանապարհ կամ ցիկլ գտնելու խնդրին։

Համիլտոնյան ճանապարհ

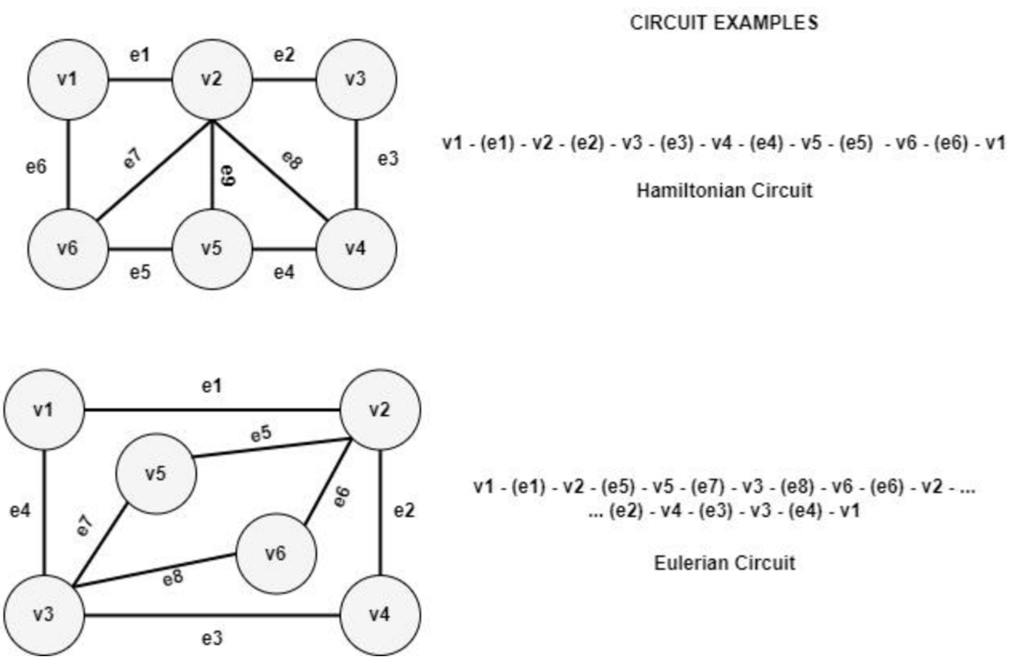
Ճանապարհը կոչվում է Համիլտոնյան, եթե այն անցնում է գրաֆի բոլոր գագաթներով, այն էլ միայն մեկ անգամ: [3]

Համիլտոնյան ցիկլ

Համիլտոնյան ճանապարհը կոչվում է Համիլտոնյան ցիկլ, եթե այն անցնում է բոլոր գագաթներով և վերադառնում է ելման կետ: [3]

Ցավոք, մինչ այժմ, Համիլտոնյան ցիկլի գոյության համար անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ հայտնի չեն:

Դրանք գտնելու համար հիմնականում օգտագործվում է բոլոր տարբերակները ուսումնասիրելու ալգորիթմիկ ճանապարհը: Այս եղանակի բացասական կողմն այն է, որ գագաթների աճմանը զուգընթաց, խնդիրը լուծելուն ուղղված քայլերի քանակը աճում է էքսպոնենցիալ ձևով (2^n):



[1]

Ծանոթության կարգով նշենք, որ Էյլերի կոմից՝ Քյոնիսբերգյան կամուրջների հետ կապված գրաֆները, միակը չեն:

Ուղղորդված և չուղղորդված գրաֆներ

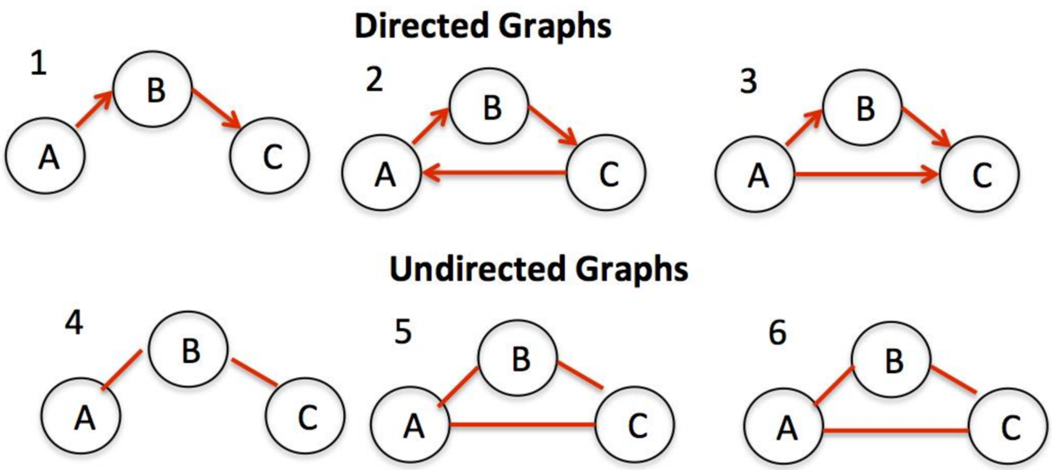
Գրաֆների տեսության մեջ դիտարկում ենք երկու դեպք՝ ուղղորդված (օրենտացված) և չուղղորդված գրաֆներ։

Այն գրաֆը, որի մի կետը մյուսին միացնող կողը նշված ուղղություն ունի, կոչվում է **ուղղորդված գրաֆ**։ [15]

Ուղղորդված գրաֆում գագաթում նշված սլաքի ուղղությունը ցույց է տալիս, թե գրաֆում ճանապարհը որ ուղղությամբ է շարժվում։

Այն գրաֆը, որի գագաթները միացնող էջերը չունեն նշված ուղղություն, կոչվում է **չուղղորդված գրաֆ**։ [15]

Եթե որևէ խնդիր լուծելուց անհրաժեշտություն է առաջանում դիմել գրաֆներին, ապա խնդրի բովանդակությունից է կախված այն կլինի ուղղորդված, թե՝ չուղղորդված։



Գրաֆների օգտագործումը մեր կյանքում

Առօրյայում հաճախակի հանդիպում ենք գրաֆների օրինակների: Գրաֆի օրինակ է մետրոպոլիտենի երթուղու սխեմատիկ նկարը: Գրաֆ է ընտանիքի գենետիկ ծառը: Իր մեջ գրաֆ է պարունակում նաև Հայաստանի քաղաքական քարտեզը: Գրաֆներն օգտագործում են օբյեկտներն ու նրանց միջև եղած կապերն ուսումնասիրելու համար: Օրինակ՝ Երևանի մետրոպոլիտենի սխեմատիկ հատակագծում գրաֆի գագաթներ են մետրոյի կայարանները, իսկ գրաֆի կողեր՝ միմյանց հարևան կայարանները միացնող հատվածը:

Գենետիկ ծառում գրաֆի գագաթներ են մարդիկ, իսկ գրաֆի կող՝ ծնողին և զավակին միացնող գիծը: Հայաստանի քաղաքական քարտեզում գրաֆի գագաթներն են բոլոր բնակավայրերը, իսկ կողեր՝ նրանց միջև ճանապարհները: [6]

Գրաֆների տեսությունը օգտագործվում է փոխադրման պլանավորման, լոգիստիկայի, երթուղայնացման, ծախսերի վերլուծության, ինչպես նաև խցանումները կանխելու մեջ, նախքան դրանց առաջացումը:

Քարտեզի վրա երկու կետերի միջև ամենակարճ երթուղին գտնելը, անշուշտ, գրաֆների տեսության ամենաշատ օգտագործվող կիրառություններից մեկն է: Գրաֆների տեսությունը բազմաթիվ կիրառություններ ունի տրանսպորտային պլանավորման մեջ, ներառյալ ճանապարհային ցանցերի մոդելավորումը, արդյունավետ երթուղիների ընտրությունը և երթևեկության հոսքերի օպտիմալացումը:

Որոնման համակարգեր

Վեբ էջերի միջև հղումների տվյալների բազան կոչվում է "Վեբ գրաֆ" (Web Graph): Այս գծապատկերներն օգտագործվում են այն կայքերի կողմից, ինչպիսիք են Google-ը, Bing-ը և Yahoo!-ն: Նրանք ինդեքսավորում են կայքերը իրենց տվյալների բազաներում, ինչը թույլ է տալիս օգտատերերին արագ գտնել համապատասխան տեղեկատվությունը ՝ օգտագործելով փնտրվող նյութի հետ կապված հիմնաբառերը:

Այլ բնագավառներում կիրառություններ

20-րդ դարի երկրորդ կեսերին՝ 70-ականների ժամանակ, գրաֆների տեսությունը մուտք էր գործել գենետիկայի ուսումնասիրության բնագավառ: Հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ գրաֆների տեսությունը կարող է օգտագործվել կենսաբանական գործընթացների մոդելավորման մեջ, ինչպիսիք են գեների կարգավորումը, ԴՆԹ կառուցվածքի ուսումնասիրումը և այլն:

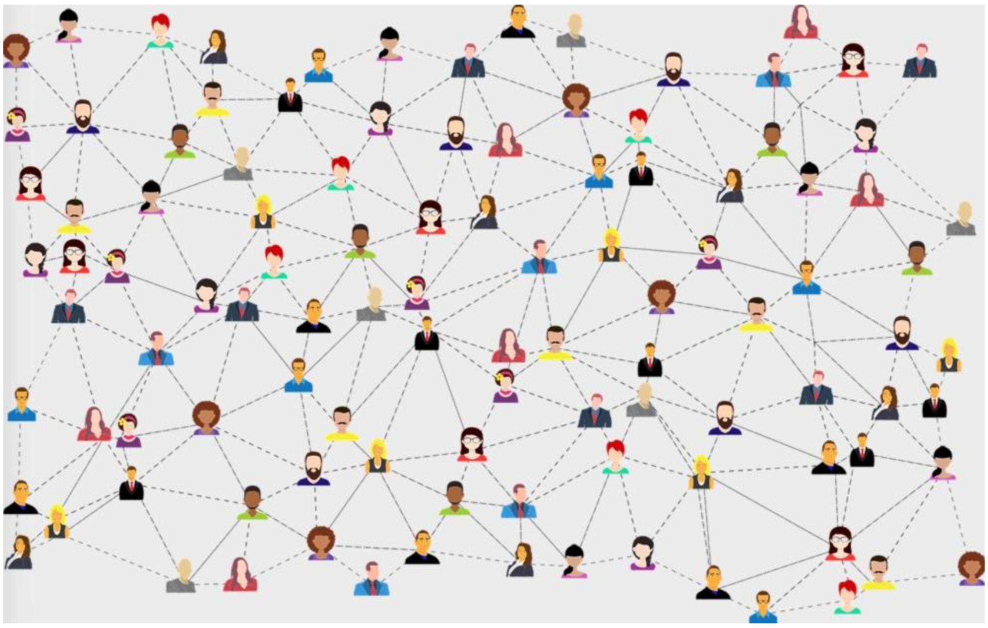
Համաճարակաբանություն

Ավելի լավ հասկանալու համար, թե ինչպես են տարածվում հիվանդությունները, համաճարակաբաններն օգտագործում են գրաֆների տեսությունը: Որոշելով, թե ով ում հետ է կապված, նրանք կարող են որոշել, թե որ մարդիկ են առավել վտանգված և ինչպես վերահսկել հիվանդության տարածումը:

Ունենալով գրաֆների տեսության վրա հիմնված համակարգչային համակարգ, հնարավոր է տիրապետել համաճարակների տարածման ընթացքներին:

Վերջապես, հետազոտողները օգտագործում են գծապատկերներ՝ մուտացիաները հայտնաբերելու համար, որոնք կարող են որոշակի պաշտպանություն ապահովել հիվանդություններից, ինչպես նաև առաջարկել դրանց բուժման տարբերակներ:

Համացանց



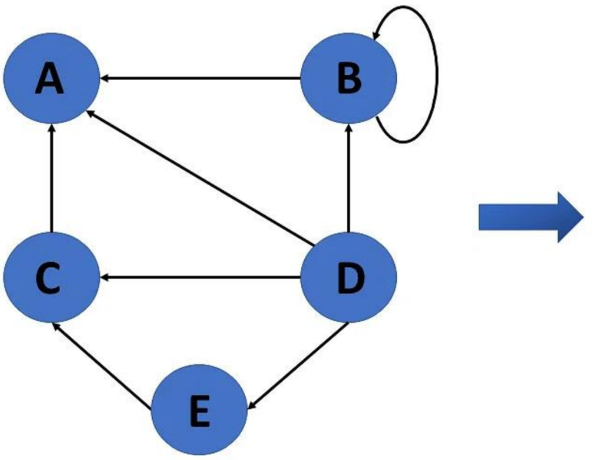
Համակարգչային գիտության ոլորտը գրաֆների տեսության ամենահայտնի կիրառություններից մեկն է ։ Համացանցն ինքնին կարելի է պատկերացնել որպես հսկա գրաֆ, որի հանգույցները ներկայացնում են առանձին համակարգիչներ, իսկ եզրերը ՝ դրանց միացումները ։ Գրաֆների տեսության մեջ մշակվում են ցանցերի միջոցով տվյալների երթուղայնացման ալգորիթմներ, ներառյալ ինտերնետը: Այս ալգորիթմները թույլ են տալիս ինտերնետի երթևեկի հոսքը անընդհատ շարունակել, նույնիսկ եթե առկա են խափանումներ կամ գերբեռնվածության կետեր: Բացի այդ, գրաֆիկների տեսության միջոցով մշակված ալգորիթմները, ընդհանուր առմամբ, ավելի արդյունավետ են, քան նրանք, որոնք մշակվել են առանց հաշվի առնելու այս տեսությունը:

Սոցիալական մեդիա

Գրաֆի տեսությունը օգտագործվում է նաև սոցիալական ցանցերում՝ տարբեր մարդկանց միջև փոխազդեցությունները մոդելավորելու համար: Դա կարելի է անել գրաֆի միջոցով, որը որոշում է, թե որքան կարևոր է հանգույցը (անձը) առցանց համայնքում՝ հիմնվելով այն բանի վրա, թե քանի կապ են նրանք հաստատել այլ հանգույցների հետ: Որքան շատ հղումներ ունեք, այնքան ավելի կարևոր եք և, հետևաբար, ավելի շատ եք փոխազդում մյուսների հետ: [9]

Հարևանության մատրիցա (adjacency matrix)

Ինչպես տեսանք գրաֆների տեսությունը կիրառվում է տարբեր բնագավառներում և մեծ մասամբ օգտագործվում է համակարգչային ծրագրերի միջոցով: Ակնհայտ է, որ գրաֆիների այն սահմանումը, որը մենք տվել ենք՝ կետերի և նրանցից որոշ զույգեր միացնող գծերի բազմություն, համակարգչի համար հասկանալի չի: Ուստի անհրաժեշտ է գրաֆի այլ ներկայացում: Գրաֆը ներկայացնելու ամենատարածված ձևերից մեկը հարևանության մատրիցն է:



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

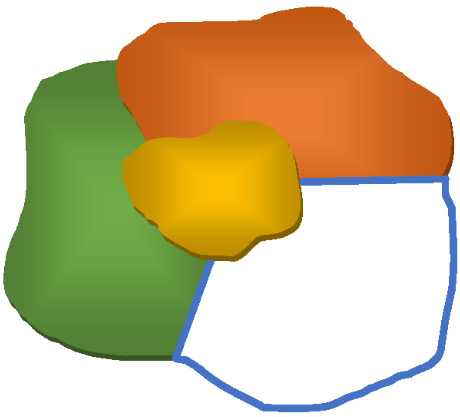
Գրաֆների տեսության և համակարգչային գիտության մեջ հարևանության մատրիցը օգտագործվում է վերջավոր գրաֆը ներկայացնելու համար: Մատրիցայի տարրերը ցույց են տալիս, թե գրաֆի գագաթների որ զույգերն են միմյան միացված, և որոնք՝ ոչ: Վերջավոր պարզ գրաֆի դեպքում հարևանության մատրիցը ներկայացվում է (0,1) մատրիցայի տեսքով: [17]

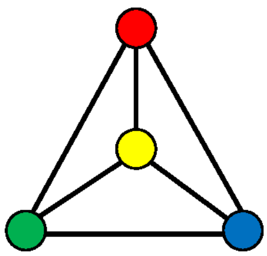
Քարտեզների գունավորման խնդիրը

Գրաֆների տեսության կարևոր ճյուղերից է գրաֆների գունավորուման խնդիրը, որն առաջացել է քարտեզները գունավորելու խնդրից: Սակայն այժմ կարևոր կիրառություն ունի բազմաթիվ բնագավառներում:

Խնդիրը հետևյալն էր. նվազագույնը քանի գույնով է հնարավոր ներկել ցանկացած քարտեզ, այնպես որ երկու հարևան երկրներ ներկված չլինեն նույն գույնով:

Հետևյալ օրինակից ակնհայտ է դառնում, որ ցանկացած քարտեզ հնարավոր չէ երեք գույնով ներկել:





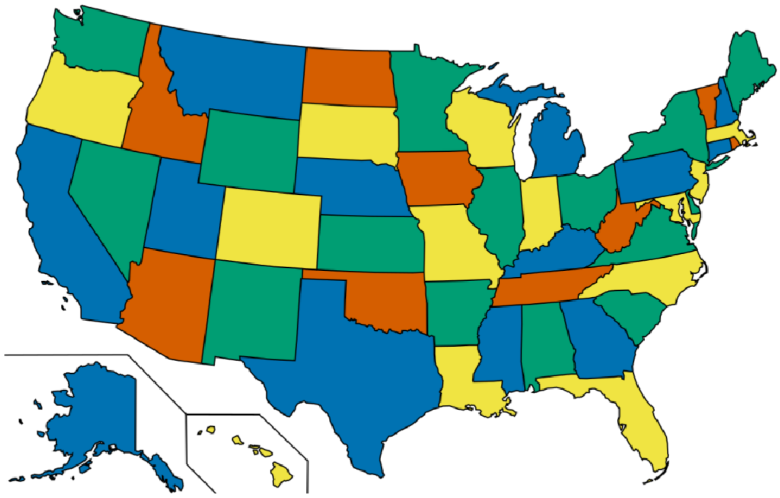
1800-ական թվականներին հեշտորեն ապացուցվել է հինգ գույների թեորեմը, որն ասում է, որ հինգ գույները բավարար են քարտեզը գունավորելու համար: [13]

Չորս գույների խնդիրը

Փաստորեն, երեք գույներով հնարավոր չէ ներկել, հինգ գույներով հնարավոր է, իսկ չորս գույների դեպքը երկար տարիներ բաց էր մնացել։

Փորձելով գունավորել Անգլիայի գավառների քարտեզը՝ Ֆրանցիս Գուտրին ձևակերպել է չորս գույների թեորեմը՝ նշելով, որ չորս գույները բավարար են քարտեզը գունավորելու համար այնպես, որ հարակից ցանկացած երկու շրջաններ ունենան տարբեր գույներ։ Այս թեորեմն ապացուցվել է 1976 թվականին Քենեթ Ապելի և Վոլֆգանգ Հաքենի կողմից բազմաթիվ կեղծ ապացույցներից և հակապատկերներից հետո։ Չորս գույների թեորեմի ապացույցն առաջին ապացույցներից մեկն է, որում օգտագործվել է համակարգիչ։ [4]

Հայտնի է, որ պացույցը պարունակել է հազարավոր դեպքերի քննարկում և համակարգչի օգտագործումը դրանով է պայմանավորված։



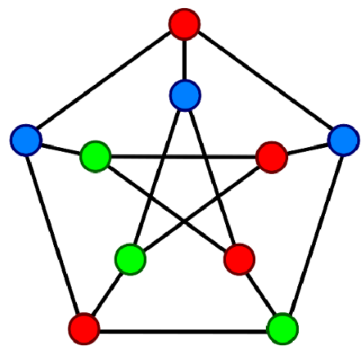
Գրաֆների գունավորում

Տերմինաբանությունը, որում պիտակները կոչվում են գույներ, գալիս է քաղաքական քարտեզների գունավորումից։

Գույների օգտագործմամբ ներկումը կոչվում է k-ներկում։ Գրաֆը ներկելու համար անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը՝ **k**, կոչվում է նրա **քրոմատիկ թիվ** և հաճախ գրանցվում է որպես **X(G)** ։

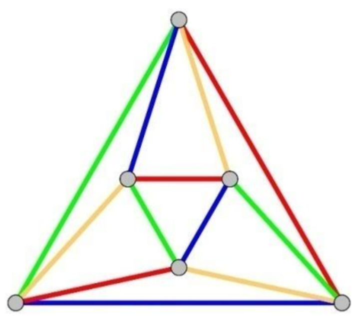
Գագաթների ներկում

Գրաֆները ներկելու մասին խոսելիս գրեթե միշտ նկատի է առնվում նրանց գագաթների ներկումը, այսինքն՝ գրաֆի գագաթներին այնպիսի գույներ տալը, որպեսզի ընդհանուր կող ունեցող երկու գագաթներն ունենան տարբեր գույներ: Քանի որ հանգույցներով գրաֆները չեն կարող ներկվել այս կերպ, դրանք քննարկման ենթակա չեն:



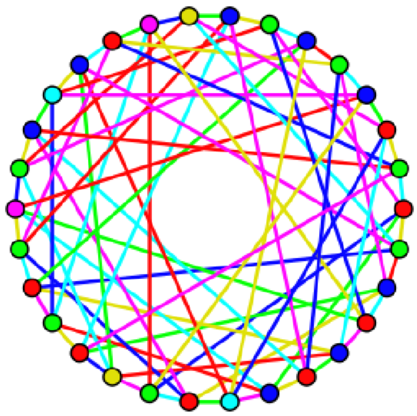
Կողերի ներկում

Գրաֆի կողերի ներկումը ենթադրում է կողերին այնպիսի գույներ տալը, որ նույն գագաթին պատկանող երկու կողեր չունենան նույն գույնը: Այս առաջադրանքը համարժեք է կողերի բազմությունն անկախ կողերի բազմությունների բաժանելուն: G գրաֆի կողային ներկման համար պահանջվող գույների նվազագույն քանակը նրա քրոմատիկ ինդեքսն է կամ կողային քրոմատիկ թիվը՝ $X'(G)$:



Ընդհանուր ներկում

Գրաֆների ընդհանուր ներկումը գագաթների և կողերի ներկման տեսակներից մեկն է: Դա ենթադրում է նրանց տալ այնպիսի գույներ, որ ոչ հարևան կողերը, ոչ էլ գագաթներն ու նրանց միացնող կողերը չունենան նույն գույնը: G գրաֆի X″(G) քրոմատիկ ընդհանուր թիվն այն ամենափոքր թիվն է, որն անհրաժեշտ է ցանկացած ամբողջական ներկման համար: [18]



Գրաֆների տեսությունը անընդհատ զարգանում է, ոչ միայն կիրառման բնագավառներով, այլև նոր տիպի գրաֆներ սահմանելու միջոցով:

Օգտագործված գրականության ցանկ

1. Graph Theory: Path vs. Cycle vs. Circuit, Fulber-Garcia
https://www.baeldung.com/cs/path-vs-cycle-vs-circuit

2. ՊԱ Պետրոսյան, ԵՐԵՎԱՆ ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ 2015
www.publishing.ysu.am/files/Grafneri_tesutyun.pdf

3. «Դիսկրետ մաթեմատիկայի տարրերը» Ռ.Ն.Տոնոյան, Երևան 1982

4. Գրաֆների ներկում
https://www.wikiwand.com/hy/%D4%B3%D6%80%D5%A1%D6%86%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AB_%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AF%D5%B8%D6%82%D5%B4

5. Основы теории графов
https://www.youtube.com/watch?v=4k8YrossPAA

6. Քառակուսի.am: Կոմբինատորիկա: Հանրահաշիվ: Երկրաչափություն: Թվերի տեսություն
http://qarakusi.am/lesson/109

7. Four Color Theorem
https://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html

8. Four color theorem, history
https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem#:~:text=In%20mathematics%2C%20the%20four%20color,regions%20have%20the%20same%20color.

9. 10 Graph Theory Applications In Real Life, Singh
https://numberdyslexia.com/graph-theory-applications-in-real-life/

10. Brilliant, Graph Theory
https://brilliant.org/wiki/graph-theory/

11. Seven Bridges of Königsberg
https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg#:~:text=The%20Seven%20Bridges%20of%20K%C3%B6nigsberg,prefigured%20the%20idea%20of%20topology.

12. map-colouring problem
https://www.britannica.com/science/map-coloring-problem

13. Five color theorem
https://en.wikipedia.org/wiki/Five_color_theorem

14. The State of the Three Color Problem, Richard Steinberg
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167506008703911#:~:text=The%20Three%20Color%20Problem%20is,conjectures%20extant%20in%20the%20literature.

15. Math Insight
https://mathinsight.org/definition/undirected_graph#:~:text=An%20undirected%20graph%20is%20graph,is%20called%20a%20directed%20graph.

16. Լեոնիդ Էյլեր կենսագրություն
https://02stroy.ru/hy/vnutrennie-lestnicy/biografiya-leonarda-eilera.html

17. Adjacency matrix
https://en.wikipedia.org/wiki/Adjacency_matrix#:~:text=In%20graph%20theory%20and%20computer,with%20zeros%20on%20its%20diagonal.

18. Գրաֆների ներկում
https://hy.wikipedia.org/wiki/%D4%B3%D6%80%D5%A1%D6%86%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AB_%D5%B6%D5%A5%D6%80%D5%AF%D5%B8%D6%82%D5%B4